Пример 1. Однородная прямоугольная пластина длиной l, шириной h и силой тяжести P может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси Ox, пересекающей вертикальную ось вращения Oz в точке O (рис. 88). Пластина наклонена к оси вращения Oz на угол α и удерживается под этим углом пружиной, которая перпендикулярна оси вращения и имеет жесткость c. Пружина не деформирована при $\alpha=\alpha_0$.

Определить угол α, считая его малым, и полные реакции подпятника A и подшипника B при вращении пластины вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, если $AB=l=2$ м, $h=1$ м, $P=10$ кН, $c=175$ кН/м, $\omega=20\ \text{с}^{-1}$, $\alpha_0=2°$, $OA={}^1/_3\,AB$.

Решение. Применим к пластине следствие из принципа Даламбера, приравняв нулю сумму моментов внешних сил и сил инерции относительно оси Ox. Действие пружины на пластину заменим силой упругости $\bar F$, а действие подшипника в точке O — силами реакций $\bar Y_O$ и $\bar Z_O$ (рис. 89). В точке O приложим также главный вектор сил инерции $\bar\Phi$, параллельный оси Oy (ускорение центра масс $\bar a_C$ параллельно этой оси), и главный момент этих сил $\bar L_O^{(\Phi)}$. Имеем

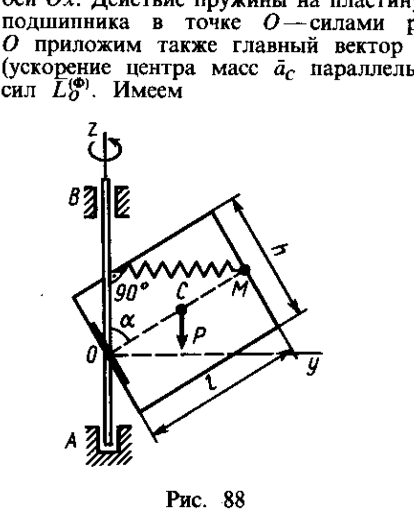

Рис. 88

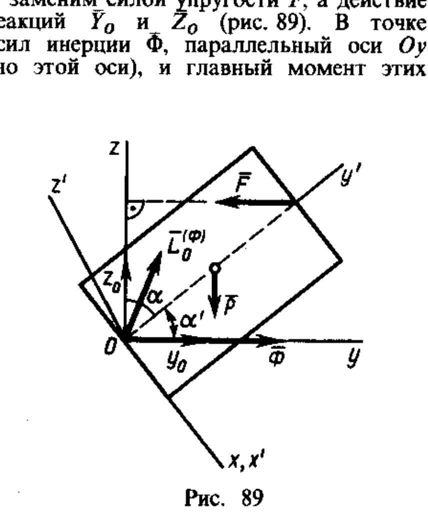

Рис. 89

$$Fl\cos\alpha-P\frac{l}{2}\sin\alpha+L_x^{(\Phi)}=0;$$

$$F=c\lambda=cl(\sin\alpha-\sin\alpha_0)=cl(\alpha-\alpha_0); \tag{а}$$

$$L_x^{(\Phi)}=J_{xz}\varepsilon-J_{yz}\omega^2=-J_{yz}\omega^2, \tag{б}$$

так как

$$\varepsilon=\left|\frac{d\omega}{dt}\right|=0,\ \ \sin\alpha\approx\alpha,\ \ \sin\alpha_0\approx\alpha_0$$

для малых углов α и α_0. Подставляя эти значения в (а), получим следующее уравнение для определения α:

$$cl^2(\alpha-\alpha_0)-\frac{Pl}{2}\alpha-J_{yz}\omega^2=0. \tag{а'}$$

Центробежный момент инерции J_{yz} вычислим по формуле (35′) (см. § 9 гл. 3). Имеем

$$J_{yz}=\frac{J_{z'}-J_{y'}}{2}\sin 2\alpha\approx(J_{z'}-J_{y'})\alpha, \tag{в}$$

так как $\sin 2\alpha'=\sin 2\alpha\approx 2\alpha$, где $J_{y'}$ и $J_{z'}$ — моменты инерции относительно главных осей инерции Oy' и Oz'. Ось Oy' является осью симметрии пластины, и поэтому она является главной осью инерции для всех точек этой оси. Ось Oz' перпендикулярна пластине, плоскость которой служит для нее плоскостью симметрии. Такая ось тоже является главной осью инерции для точки O, расположенной в этой плоскости.

Для главных моментов инерции пластины, согласно формуле (13) (см. § 4 гл. 3), соответственно имеем

$$J_{y'}=\frac{P}{g}\frac{h^2}{12};\ \ J_{z'}=\frac{P}{g}\left(\frac{l^2}{3}+\frac{h^2}{12}\right).$$

Подставляя эти величины в (в), получим

$$J_{yz}=(J_{z'}-J_{y'})\alpha=\frac{P}{g}\frac{l^2}{3}\alpha.$$

После этого для α из (а′) имеем

$$cl^2(\alpha-\alpha_0)-\frac{Pl}{2}\alpha-\frac{P}{g}\frac{l^2}{3}\alpha\omega^2=0,$$

или

$$\alpha=\frac{cl\alpha_0}{cl-\dfrac{P}{2}-\dfrac{Pl}{3g}\omega^2}=\frac{350}{78}\alpha_0=4{,}5\alpha_0=9°\approx 0{,}16.$$

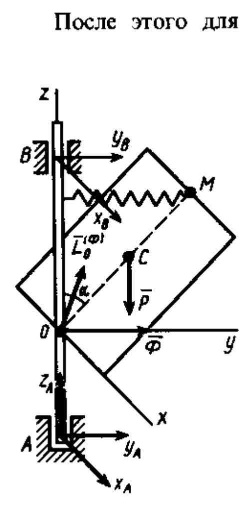

Рис. 90

Для определения полных реакций подпятника A и подшипника B рассмотрим систему тел, состоящую из пластины, пружины и стержня AB, заменив действия подпятника и подшипника силами реакций, разложенными на составляющие, параллельные осям координат (рис. 90).

По формулам (25) имеем

$$\left.\begin{aligned}&X_A+X_B+\Phi_x=0;\\&Y_A+Y_B+\Phi_y=0;\\&Z_A-P=0;\\&Y_A\cdot OA-Y_B\cdot OB+L_x^{(\Phi)}=0;\\&-X_A\cdot OA+X_B\cdot OB+L_y^{(\Phi)}=0.\end{aligned}\right\} \tag{г}$$

Проекции главного вектора и главного момента сил инерции вычисляем по формулам (23) и (24); учитывая, что $\varepsilon=0$, получаем

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_x=\frac{P}{g}y_C\varepsilon+\frac{P}{g}x_C\omega^2=\frac{P}{g}x_C\omega^2;\\&\Phi_y=-\frac{P}{g}x_C\varepsilon+\frac{P}{g}y_C\omega^2=\frac{P}{g}y_C\omega^2;\\&L_x^{(\Phi)}=J_{xz}\varepsilon-J_{yz}\omega^2=-J_{yz}\omega^2;\\&L_y^{(\Phi)}=J_{yz}\varepsilon+J_{xz}\omega^2=-J_{xz}\omega^2.\end{aligned}\right\} \tag{д}$$

Ось Ox перпендикулярна плоскости симметрии пластины, проходящей через OM перпендикулярно пластине. Следовательно, она является главной осью инерции для точки O, поэтому $J_{xz}=0$. Кроме того, в рассматриваемом случае

$$x_C=0;\ \ y_C=\frac{l}{2}\sin\alpha\approx\frac{l}{2}\alpha.$$

С учетом этого из (г) получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&X_A+X_B=0;\\&Y_A+Y_B+\frac{Pl}{2g}\omega^2\alpha=0;\\&Z_A-P=0;\\&Y_A\cdot OA-Y_B\cdot OB-J_{yz}\omega^2=0;\\&-X_A\cdot OA+X_B\cdot OB=0.\end{aligned}\right\} \tag{г'}$$

Из первого и последнего уравнений этой системы следует

$$X_A=X_B=0.$$

Третье уравнение дает

$$Z_A=P.$$

Из второго и четвертого уравнений (г) получаем

$$Y_A=\frac{1}{AB}\left(J_{yz}\omega^2-\frac{Pl}{2g}\alpha\omega^2\cdot OB\right)\approx\frac{P\omega^2\alpha}{g}\left(\frac{l}{3}-OB\right)=-\frac{128}{3}=-42{,}7\ \text{кН};$$

$$Y_B=-\frac{1}{AB}\left(J_{yz}\omega^2+\frac{Pl}{2g}\alpha\omega^2\cdot OA\right)\approx\frac{-P\omega^2\alpha}{g}\left(\frac{l}{3}+OA\right)=-\frac{256}{3}=-85{,}3\ \text{кН}.$$

Пример 2. Однородный круглый цилиндр силой тяжести $P=200$ Н, радиусом $R=20$ см, длиной $l=80$ см с помощью вала AB вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega=20\ \text{с}^{-1}$ (рис. 91). Ось вращения касается поверхности цилиндра посередине образующей в точке O так, что отрезок OC, соединяющий точку касания с центром масс цилиндра, перпендикулярен оси вращения. Продольная ось цилиндра наклонена к вертикали на угол $\alpha=45°$.

Определить динамические реакции подшипника A и подпятника B, если $AB=100$ см, $OA=60$ см. Массой вала AB пренебречь.

Решение. Выберем правую систему осей координат $Oxyz$, скрепленных с движущимся цилиндром и началом координат в точке O. Ось Oz направим по оси вращения; ось Ox — по линии, соединяющей точку O с центром масс C, ось Oy направим перпендикулярно Ox и Oz.

Динамические реакции вместе с силами инерции системы образуют равновесную систему сил, т. е. удовлетворяют условиям равновесия для сил

$$\bar R_A+\bar R_B+\bar\Phi=0;\ \ \bar M_O(\bar R_A)+\bar M_O(\bar R_B)+\bar L_O^{(\Phi)}=0, \tag{а}$$

Рис. 91

где $\bar\Phi$ — главный вектор сил инерции; $\bar L_O^{(\Phi)}$ — главный момент сил инерции относительно точки O, выбранной за центр приведения сил инерции. Главный вектор сил инерции при вращении цилиндра вокруг неподвижной оси вычисляется по формулам

$$\bar\Phi=\sum\bar\Phi_k=-M\bar a_C\ \left\{\begin{aligned}&\Phi_x=-Ma_{Cx}=My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2;\\&\Phi_y=-Ma_{Cy}=-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2;\\&\Phi_z=-Ma_{Cz}=0.\end{aligned}\right.$$

Для главного момента сил инерции относительно точки на оси вращения справедливы формулы

$$\bar L_O^{(\Phi)}=\sum\bar M_O(\bar\Phi_k)=-\frac{d\bar K_O}{dt}\ \left\{\begin{aligned}&L_x^{(\Phi)}=-\frac{dK_x}{dt}=J_{xz}\varepsilon-J_{yz}\omega^2;\\&L_y^{(\Phi)}=-\frac{dK_y}{dt}=J_{yz}\varepsilon+J_{xz}\omega^2;\\&L_z^{(\Phi)}=-\frac{dK_z}{dt}=-J_z\varepsilon,\end{aligned}\right.$$

здесь M — масса цилиндра; x_C, y_C, z_C — координаты центра масс. При сделанном выборе осей координат $x_C=-R$, $y_C=0$, $z_C=0$. Кроме того, так как $\omega=\text{const}$, то угловое ускорение $\varepsilon=0$. Еще одно упрощение связано с тем, что ось Ox является главной осью инерции для точки O, так как эта точка находится на главной центральной оси инерции Cx'. Поэтому $J_{xz}=0$.

С учетом упрощений спроецируем векторные уравнения (а) на оси координат. Получим следующие пять уравнений для определения динамических реакций:

$$X_A+X_B-\frac{P}{g}\omega^2R=0;\ \ Y_A+Y_B=0;\ \ Z_B=0;$$

$$-Y_A\cdot OA+Y_B\cdot OB-J_{yz}\omega^2=0;\ \ X_A\cdot OA-X_B\cdot OB=0.$$

Из второго и четвертого уравнений этой системы определяем проекции динамических реакций $\bar Y_A$ и $\bar Y_B$. Имеем

$$Y_A=-Y_B=-J_{yz}\omega^2/AB.$$

Из первого и пятого уравнений соответственно получаем

$$X_A=\frac{PR\omega^2\cdot OB}{g\cdot AB}\approx 653\ \text{Н};\ \ X_B=\frac{PR\omega^2\cdot OA}{g\cdot AB}\approx 980\ \text{Н}.$$

Для полного решения задачи необходимо вычислить центробежный момент инерции J_{yz}.

Центробежные моменты инерции обычно вычисляются через главные центральные осевые моменты инерции. Получим необходимую формулу.

Выберем в точке C систему координат $Cx_1y_1z_1$, оси которой параллельны осям системы координат $Oxyz$. Координаты любой точки цилиндра относительно этих двух систем осей координат связаны между собой формулами параллельного переноса в направлении оси Cx_1 на величину $CO=R$; поэтому

$$x_k=x_{1k}-R;\ \ y_k=y_{1k};\ \ z_k=z_{1k}.$$

Так как

$$J_{yz}=\sum m_ky_kz_k;\ \ J_{y_1z_1}=\sum m_ky_{1k}z_{1k},$$

то

$$J_{yz}=J_{y_1z_1}.$$

Для вычисления центробежного момента инерции $J_{y_1z_1}$ в качестве вспомогательных осей координат возьмем главные центральные оси инерции цилиндра $Cx'y'z'$ (оси его симметрии). Систему осей координат $Cx'y'z'$ можно получить

из системы $Cx_1y_1z_1$, поворачивая ее на угол α вокруг оси Cx'. Формулы преобразования координат любой точки тела при повороте осей (рис. 92) можно выразить в форме

$$y_{1k}=r_k\cos(\alpha+\varphi_k)=$$
$$=r_k\cos\varphi_k\cos\alpha-r_k\sin\varphi_k\sin\alpha=y'_k\cos\alpha-z'_k\sin\alpha;$$
$$z_{1k}=r_k\sin(\alpha+\varphi_k)=$$
$$=r_k\cos\varphi_k\sin\alpha+r_k\sin\varphi_k\cos\alpha=y'_k\sin\alpha+z'_k\cos\alpha,$$

так как

$$r_k\cos\varphi_k=y'_k;\ \ r_k\sin\varphi_k=z'_k.$$

Рис. 92

Используя эти формулы, имеем

$$J_{y_1z_1}=\sum m_ky_{1k}z_{1k}=\left(\sum m_ky'_kz'_k\right)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\sum m_k(y_k'^2-z_k'^2)\cos\alpha\sin\alpha.$$

В рассматриваемом случае

$$\sum m_ky'_kz'_k=J_{y'z'}=0$$

как центробежный момент инерции относительно главных осей инерции Cy', Cz'.

Прибавляя в выражении для $J_{y_1z_1}$ величину

$$\left(\sum m_kx_k'^2-\sum m_kx_k'^2\right)\cos\alpha\sin\alpha=0,$$

получаем

$$J_{y_1z_1}=\left[\sum m_k(x_k'^2+y_k'^2)-\sum m_k(x_k'^2+z_k'^2)\right]\frac{\sin 2\alpha}{2}=\frac{J_{z'}-J_{y'}}{2}\sin 2\alpha,$$

где $J_{z'}$ и $J_{y'}$ — моменты инерции относительно главных центральных осей инерции Cz' и Cy' соответственно. Они для цилиндра определяются по формулам

$$J_{z'}=\frac{P}{g}\frac{R^2}{2};\ \ J_{y'}=\frac{P}{g}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{l^2}{12}\right).$$

Итак, для искомого центробежного момента инерции имеем

$$J_{yz}=J_{y_1z_1}=\frac{J_{z'}-J_{y'}}{2}\sin 2\alpha=\frac{P}{2g}\left(\frac{R^2}{4}-\frac{l^2}{12}\right)\sin 2\alpha=-\frac{PR^2}{24g}\left(\frac{l^2}{R^2}-3\right)\sin 2\alpha=$$
$$=-\frac{200\cdot 400}{24\cdot 980}\left(\frac{6400}{400}-3\right)1=-44{,}2\ \text{кг}\cdot\text{см}^2.$$

После этого

$$Y_A=-Y_B=-\frac{J_{yz}\omega^2}{AB}=\frac{44{,}2\cdot 400}{100}=177\ \text{Н}.$$

Таким образом определены проекции динамических реакций на оси координат, т. е. поставленная задача решена.